ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION P'

CONCOURS D'ADMISSION 1986

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Dans tout le problème, on note $\| f \|$ la borne supérieure de la valeur absolue de toute fonction f à valeurs réelles définie et bornée sur $\mathbb{R}$. La dérivée k-ième de f, si elle existe, est notée $f^{(k)}$, et on convient que $f^{(0)}$ est f elle-même.

I

Pour tout entier n strictement positif on note $\mathfrak{T}_n$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et dont les valeurs pour tout x réel sont données par

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

où les a_j et les b_j sont des réels.

1. Montrer que si $f \in \mathfrak{T}_n$ et s'il existe un réel α et $2n + 1$ réels distincts x appartenant à $[\, \alpha\, ,\, \alpha + 2\pi\, [$ et tels que $f(x) = 0$, alors f est la fonction nulle.

2. Soient a et b deux réels et s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $s(x) = a \sin(nx + b)$. Montrer que $\| s' \| = n \| s \|$.

3. On suppose dans cette question qu'il existe une fonction $g \in \mathfrak{T}_n$ et un réel u pour lequel $g'(u) = \| g' \|$, avec $g'(u) > n \| g \|$, et on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{n} \| g' \| \sin [n(x - u)] - g(x) .$$

a. Montrer que h change exactement $2n$ fois de signe sur l'intervalle $[\, u + \frac{\pi}{2n}\, ,\, u + \frac{\pi}{2n} + 2\pi\, [$.

b. Calculer $h'(u)$ et montrer que h' s'annule au moins $2n + 1$ fois sur $[\, u\, ,\, u + 2\pi\,]$.

c. Calculer $h''(u)$ et montrer que h'' s'annule au moins $2n + 1$ fois sur $[\, u\, ,\, u + 2\pi\, [$. En déduire une expression explicite de g.

d. Les hypothèses faites sur g sont-elles compatibles entre elles ?

Tournez la page S. V. P.

Ecole Polytechnique
Option P'.Math 1 et Option P'.math 2
1986
page 69

4. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_n$ et tout entier $k \geqslant 0$, établir l'inégalité

$$\| f^{(k)} \| \leqslant n^k \| f \| .$$

Si k et n sont fixés, existe-t-il des fonctions pour lesquelles l'égalité est atteinte ?

II

Pour tout entier n positif ou nul, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des fonctions polynômes d'une variable réelle, à coefficients réels, et de degré *au plus* égal à n. Pour tout $P \in \mathcal{S}_n$, on pose

$$N(P) = \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} | P(x) |$$

et on note $N'(P)$ la plus grande des valeurs absolues des coefficients de P.

1. Soit C la fonction définie pour tout $x \in [-1, 1]$ par $C(x) = \cos [n (\text{Arc cos } x)]$.

a. Montrer que C coïncide sur $[-1, 1]$ avec une fonction de $\mathcal{S}_n$, qu'on notera aussi C, et calculer $N(C)$.

b. Etablir l'inégalité $| \sin nt | \leqslant n | \sin t |$ pour tout t réel. En déduire l'inégalité $N(C') \leqslant n^2$ puis la valeur de $N(C')$.

2. On note $x_1, \ldots, x_n$ les racines de C, rangées dans l'ordre *décroissant*.

a. Vérifier que pour tout $x \in [x_n, x_1]$ on a $n\sqrt{1-x^2} \geqslant 1$.

b. Calculer $| C'(x_i) |$ en fonction de x_i pour $i = 1, \ldots, n$.

3. Soit $Q \in \mathcal{S}_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$; on pose

$$M(Q) = \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} (|Q(x)| \sqrt{1-x^2}) .$$

a. Montrer que pour tout x réel n'annulant pas C on a

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} Q(x_i) \frac{C(x)}{(x - x_i) C'(x_i)} .$$

b. Déduire de ce qui précède l'inégalité $N(Q) \leqslant nM(Q)$.

4. Soient P un polynôme appartenant à $\mathcal{S}_n$ et k un entier appartenant à $[0, n]$.

a. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$| P'(x) | \leqslant n N(P) (1 - x^2)^{-1/2}$$

[on pourra utiliser la fonction $t \to P(\cos t)$].

b. Etablir l'inégalité

$$N(P^{(k)}) \leqslant \left[\frac{n!}{(n-k)!} \right]^2 N(P) .$$

c. Vérifier l'équivalence des deux normes N et N' sur $\mathcal{S}_n$ en précisant pour le quotient $N'(P)/N(P)$ un encadrement indépendant de $P \neq 0$.

III

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa dérivée n-ième.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit le polynôme $P_x \in \mathcal{S}_{n-1}$ par

$$P_x(y) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x) \frac{y^k}{k!} .$$

a. Majorer $N(P_x)$ à l'aide de $\| f \|$ et de $\| f^{(n)} \|$.

b. En déduire que, pour tout entier $k \in]0, n[$, $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ en établissant la majoration

$$\| f^{(k)} \| \leqslant \left[\frac{n!}{(n-k)!} \right]^2 \left(\| f \| + \frac{\| f^{(n)} \|}{n!} \right) .$$

2. On applique le résultat de la question précédente en remplaçant f par la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(\lambda x)$, où λ est un réel fixé. Par un choix convenable de λ, établir l'inégalité

$$\| f^{(k)} \| \leqslant 2 \frac{(n!)^{2-\frac{k}{n}}}{[(n-k)!]^2} \| f \|^{1-\frac{k}{n}} \| f^{(n)} \|^{\frac{k}{n}} .$$

3. Si de plus $f \in \mathcal{C}_{n_0}$ pour un entier n_0, f appartient à $\mathcal{C}_n$ pour tout entier $n \geqslant n_0$ et le résultat de I.4 permet une majoration de $\| f^{(n)} \|$ par $n^n \| f \|$ qui, reportée dans le résultat de III.2, fournit une nouvelle majoration de $\| f^{(k)} \|$. Comparer cette majoration à celle obtenue directement en I.4 en donnant un équivalent simple du logarithme de leur quotient. (On rappelle que, lorsque n tend vers $+\infty$, la différence

$$\ln (n!) - [(n + \frac{1}{2}) \ln n - n]$$

reste bornée.)

♦